

Hoofdstuk 11.

Voorkennis: Lineaire vergelijkingen met twee variabelen.

Kort samengevat: Niets nieuws: alleen de vorm is anders. Je bent gewend aan $y = ax + b$.

Nu staat er: $ax + by = c$. Dit zijn natuurlijk NIET dezelfde a en b van de eerste vorm.

Wat moet je weten:

1. Hoe je van $4x + 2y = 20$ kan ombouwen naar de $y = ax + b$. (zie boek)
2. Hoe je toch snel kan plotten $4x + 2y = 20$: Truc: Als $x=0$, $y = 10$ en $y=0$ zou betekenen dat $x = 5$. Dus je trekt de lijn door $(0, 10)$ en $(5, 0)$.
Dan is 'ombouwen' naar de bekende vorm niet nodig.

Kijk even goed naar de voorkennis.

11.1 Gebieden.

In de essentie gaat het om twee dingen:

1. Je hebt gelijkheden en ongelijkheden
2. Je hebt vlakken die worden ingesloten door deze ongelijkheden.

Enkele opmerkingen:

- $x > 0$ betekent dat alle x 'en goed zijn mits boven de 0.
- $x < 12$ betekent dat alle x -en beneden de 12 moeten zijn.
- $x \geq 10$ betekent dat x waarden boven de 10 moeten zijn maar het mag ook 10 zelf zijn.
- In het boek vinden we dit: Men noemt de gebieden vaak halfvlakken.

Theorie B De ongelijkheid $ax + by \leq c$

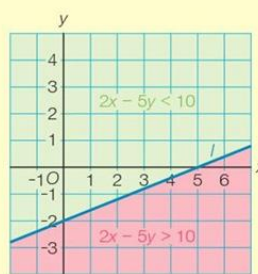
De lijn $l: 2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee

halfvlakken. De grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak dat bestaat uit alle punten waarvoor $2x - 5y > 10$ klopt. Om erachter te komen welk halfvlak bij $2x - 5y > 10$ hoort, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een handig gekozen punt in. Neem je bijvoorbeeld $(0, 0)$, dan krijg je $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > 10$ oftewel $0 > 10$; dit klopt niet. Dus de grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak waarin $(0, 0)$ niet ligt. En zo is de grafiek van $2x - 5y < 10$ het halfvlak waarin $(0, 0)$ wel ligt. Zie figuur 11.7

Bij $ax + by \geq c$ hoort een **halfvlak met rand**. De rand is de lijn $ax + by = c$. Bij het tekenen van een halfvlak met rand geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak.

De grafiek van $ax + by \leq c$ is een halfvlak met rand begrensd door de lijn met vergelijking $ax + by = c$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je bij een lineaire ongelijkheid met twee variabelen de grafiek tekent.



figuur 11.7

De ongelijkheid:

Hoe je toch snel kan plotten $4x + 2y = 20$: Truc: Als $x=0$, $y = 10$ en $y=0$ zou betekenen dat $x = 5$. Dus je trekt de lijn door $(0, 10)$ en $(5, 0)$.

Als er had gestaan: $4x + 2y > 20$ moet je dus uitzoeken aan welke kant van de lijn je moet zijn. Ook hier een simpele methode: Je kiest een punt $(0,0)$ of $(1,1)$ en test of dat punt mag 'meedoen'. Als ik $(0,0)$ invul, staat er: $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 > 20$. Nee 0 is niet groter dan 20, dus alle buirpunten die aan die zijde van de lijn liggen, zo ook $(0,0)$ zijn niet geldig. Je moet dus het gebied hebben aan de andere kant van die lijn.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $2x + 3y \leq -6$.

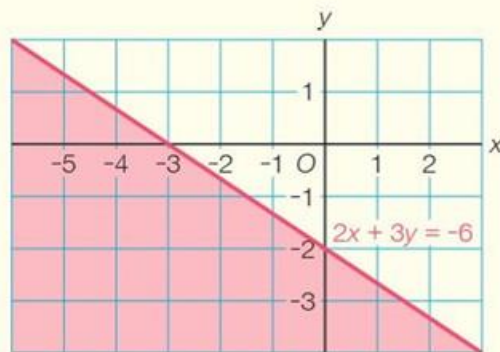
Uitwerking

De lijn $2x + 3y = -6$.

x	0	-3
y	-2	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -6$; dit klopt niet.

Je moet het halfvlak met rand hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.



Oefen met de A-sommen!

11.2: Herleiden van formules.

Komt op eindexamens best vaak terug. Zorg dat je dit beheerst.

Op pagina 113 zie je welke regels steeds worden gebruikt. Machtsregels en gedoe met breuken. Ik heb dat in de les uitgelegd.

Eén pagina verder zien we ook herleidingen met wortels.

Oefen met deze oefening uit het boek: op pag 115 staat het antwoord.

- a Herleid de formule $D = \frac{7-2q}{1,5} \cdot 21 + 18$ tot de vorm $D = aq + b$.
- b Maak L vrij bij de formule $K = 8 - \frac{5}{L}$.
- c Maak N vrij bij de formule $M = \frac{2N-3}{4}$.

Je moet oefenen tot som 29. Maak een slimme selectie maar zorg wél dat je het weet.

Het verhaal erna borduurt er op voort:

Theorie B Formules combineren

Om de formules $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ en $3p - 2q = 6$ te combineren tot de vorm $D = ap^2 + bp + c$ moet in de formule $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ de variabele q worden vervangen door een formule waarbij q is uitgedrukt in p . Dus maak eerst q vrij bij $3p - 2q = 6$.

$$3p - 2q = 6$$

$$-2q = -3p + 6$$

$$q = 1,5p - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} q = 1,5p - 3 \\ D = 3p^2 + 4pq - 6q \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 3p^2 + 4p \cdot (1,5p - 3) - 6 \cdot (1,5p - 3) \\ D = 3p^2 + 6p^2 - 12p - 9p + 18 \\ D = 9p^2 - 21p + 18 \end{array}$$

Je kunt de formules $P = 25x$ en $x = (\frac{1}{5})^t$ combineren tot de formule $P = 5^{2-t}$.

Combineren van de formules geeft $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t$. Schrijf vervolgens zowel 25 als $(\frac{1}{5})^t$ als macht van 5.

Je krijgt $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t = 5^2 \cdot (5^{-1})^t = 5^2 \cdot 5^{-t} = 5^{2-t}$.

Simpel gezegd prop je de ene formule in de andere.

Oefen met som A33 en A34.

Als die lekker gaan, weet je genoeg.

In 11.3 gaat het om Evenredigheden.

Eigenlijk twee soorten:

1. Rechtevenredig: Alle boodschappen bij de super.
2. Omgekeerd evenredig: Een stuk grond wordt verdeeld over 10 mensen. Dan heeft iedereen een bepaald stukje. Dat wordt kleiner als het 20 mensen zijn: Ieders deel zal dan 2x zo klein worden: Ergo: $X \cdot Y = \text{Constant}$

In dat laatste voorbeeld:

10 mensen delen 10000 m² Ieder krijgt 1000m²

Dus mensen x oppervlakte is steeds 10000 .

Als er dus 50 mensen zijn: $m = 50$: $m \times \text{Opp} = 10000$, dan zal De oppervlakte 5 x zo klein worden: 200 m² dus.. $50 \times 200 = 10000$. Klopt. Doodsimpel.

Oefen zelf met A41 tot A45.

11.4 Redeneren met Formules

Level 1:

Formule: $K = 10x + 100$

Als x groter wordt wordt 10x dus ook groter. Tel er 100 bij en je hebt De waarde van K.

Formule: $K = 100 / x$ Als nu x groter wordt, wordt die 100 door een groter getal gedeeld waardoor K juist kleiner wordt.

Formule: $K = 500 \cdot 0,80^x$ Als X groter wordt, wordt de macht 0,80^x juist weer kleiner en dus blijft er van die 500 niks over op den duur. En dus neemt K ook af.

Level 2:

Formule: $N = 100(100 - 0,80^T)$ Redeneer nu zelf wat er met N gebeurt als je voor T steeds grotere waarden kiest. Plot ook even met je GRM om te zien of die trend klopt met wat je voorspelt.

Formule van logistische aard:

Bij $N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ redeneer je als volgt.

1. grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0 en dan wordt $20 \cdot 0,75^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,75^t \approx 3$. Dus dan wordt

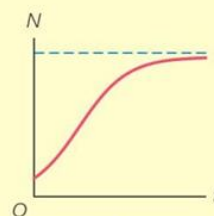
$$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t} \approx \frac{2400}{3} = 800.$$

Dus de grenswaarde is 800.

2. stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,75^t$ ook af, dus ook $3 + 20 \cdot 0,75^t$ neemt af. Daarom neemt

$$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t} \text{ toe en is de grafiek van } N \text{ stijgend.}$$



figuur 11.19

$$N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$$

Het zelfde geldt voor breuken.

Zorg dat je deze snapt:

Voorbeeld

Bereken of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $y = 100 - \frac{20}{3x + 1}$

b $y = \frac{10}{x^2 + 1} - 5$

c $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

Uitwerking

a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus

$\frac{20}{3x + 1}$ neemt af en $100 - \frac{20}{3x + 1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe en

$\frac{10}{x^2 + 1}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{x^2 + 1} - 5$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

c Als x toeneemt, dan neemt $0,8^x$ af en $50 \cdot 0,8^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

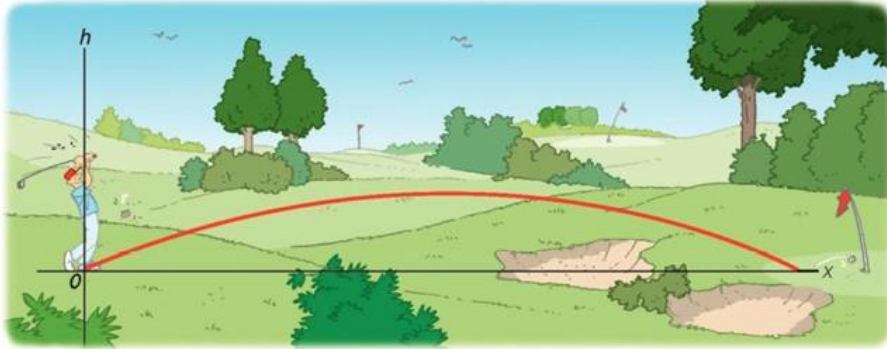
Dus de grafiek van y is dalend.

11.5 Wiskundige modellen

Eigenlijk niks nieuws.

61 Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meters. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	30	55	60
h	0	3,5	7,5	7,0	6,0



figuur 11.21

Men neemt aan dat de baan de vorm van een parabool heeft. Men gaat uit van het model $h = -0,005x^2 + 0,4x$.

- a** Controleer dat de formule klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- b** Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?
- c** Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?
- d** De formule komt niet overeen met één van de meetwaarden in de tabel. Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

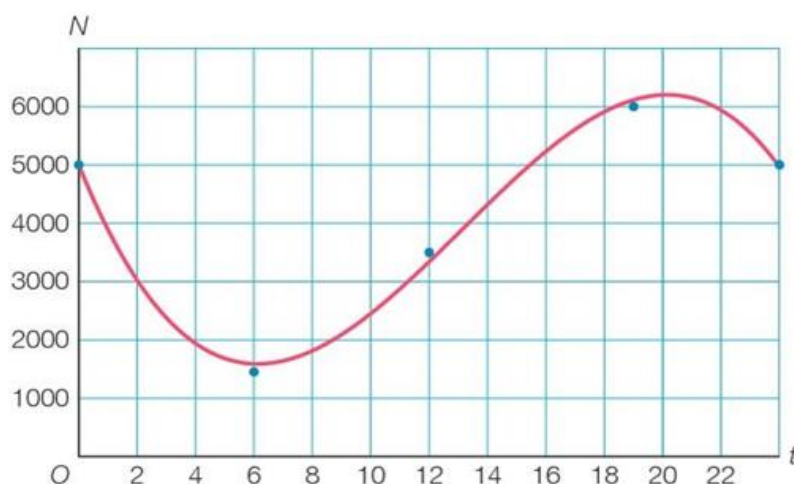
Ad a) Controleren: Zet de gegeven formule in de GRM en kijk in de tabel of de getallen overeen komen met wat hier staat

Ad b) Idem: Gebruik CALC->Maximum nadat je m geplot hebt.

Ad c) Idem

Ad d) Effe uitzoeken welke dat is.

Het aantal bezoekers van een website is op een doordeweekse dag om zes uur 's morgens minimaal met 1450 bezoekers en om zeven uur 's avonds maximaal met 6000 bezoekers. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. En om 0 uur en 24 uur zijn er 5000 bezoekers. In de figuur hieronder zijn deze gegevens als punten getekend. Bovendien is de grafiek bij het model $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ getekend. Hierbij is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur.



figuur 11.22

- a** Het minimale aantal bezoekers in het model wijkt af van het werkelijke minimum.
Hoeveel procent scheelt het?
- b** Het tijdstip waarop het maximale aantal bezoekers wordt bereikt, wijkt in het model af van de werkelijkheid.
Hoeveel minuten scheelt het?

Zo'n zelfde verhaal.

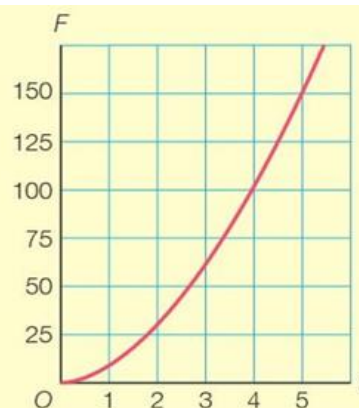
Leer de gegeven formule snel te plotten in je GRM en begrijp dat je window hier dus moet worden ingesteld: Xmin = 0 Xmax = 24, Y-min = 0 en Ymax = 7000.

Succes.

In figuur 11.24 is F uitgezet tegen t . Als gegeven is dat bij de grafiek een formule hoort van de vorm $F = at^{1,75}$, dan kun je met het invullen van de coördinaten van een geschikt gekozen punt de waarde van a berekenen. Lees af $t = 5$ en $F = 150$.

Invullen geeft $a \cdot 5^{1,75} = 150$, dus $a = \frac{150}{5^{1,75}} = 8,972...$

Afgerond op gehelen is $a = 9$, dus de formule is $F = 9t^{1,75}$.



figuur 11.24

In deze opgave laten ze je een formule passend maken. Meestal kies je dan slimme afleesbare coördinaten uit de grafiek en vult die in. Doen zij ook. Na een beetje Algebra vinden ze de formule.

Je ziet meteen aan dit voorbeeld wat je moet beheersen:

- Invoeren in de GRM
- Kiezen juiste window
- Punt aflezen en invullen in de abstracte formule
- Hiermee bepalen wat de constanten zijn: die 9 en de waarde 1,75

Oefen met 70, 71, 72 en 73.

Heel belangrijk om je voor te bereiden met de Diagnostische toets die erachter staat.

