



Voor elk onderdeel is aangegeven hoeveel punten kunnen worden behaald. Antwoorden moeten *altijd* zijn voorzien van een berekening, toelichting of argumentatie.

MAX: 55 punten

OPGAVE 1

In 2015 deden ruim 50 000 mensen mee aan de 42 195 meter bij de marathon van New York.

Bij een onderzoek werden 1050 van deze lopers ondervraagd. Het bleek dat hiervan 315 uit een Europees land kwamen.

- 5p **a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie lopers die uit een Europees land kwamen.

Bij het onderzoek waren 610 mannen en 440 vrouwen betrokken.

Van de mannen kwamen er 244 uit een Europees land.

- 3p **b** Bereken voor de mannen het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie die uit een Europees land kwam.

- 4p **c** Bereken voor de vrouwen het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie die uit een Europees land kwam.

Bij het onderzoek is ook gevraagd naar de leeftijd van de lopers. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie lopers met een leeftijd van 25-34 jaar was $[0,238; 0,294]$.

- 2p **d** Bereken de standaardafwijking van de proportie lopers met een leeftijd van 25-34 jaar.

- 5p **e** Hoeveel lopers had men moeten ondervragen om een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie lopers met een leeftijd van 25-34 jaar van $[0,250; 0,282]$ te krijgen? Rond af op tientallen.

- 5p **f** Van de 1050 ondervraagde lopers wonen er 283 in New York. Bereken hoeveel van deze 273 lopers naar verwachting een leeftijd van 25-34 jaar hadden. Gebruik dat $\sigma = 0,025$.

OPGAVE 2

Er is onderzoek gedaan naar de wenselijkheid om een groter gedeelte van de binnenstad van Utrecht af te sluiten voor vervuilende auto's. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen autobezitters en mensen die geen auto bezitten. Zie de tabel.

WENSELIJKHEID AFSLUITEN

	ja	nee	
autobezitters	203	412	615
geen auto	315	93	408
	518	505	1023

- 4p Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad of het verschil in wenselijkheid van afsluiten tussen autobezitters en mensen die geen auto bezitten groot, middelmatig of gering is.

OPGAVE 3

Op de Internet Movie Database (IMDB) is voor elk jaar een aantal centrum en spreidingsmaten bijgehouden voor de lengte van de 25 populairste films. In deze opgave vergelijken we de lengte van films uit 1985 en 2015. Zie de tabel.

LENGTE VAN DE 25 POPULAIERSTE FILMS

	1985	2015
mediaan	110 min	130 min
gemiddelde	112 min	125 min
standaardafwijking	14 min	15 min
kwartielafstand	$118 - 98 = 20$ min	$144 - 114 = 30$ min
minimum	90 min	92 min
maximum	175 min	187 min

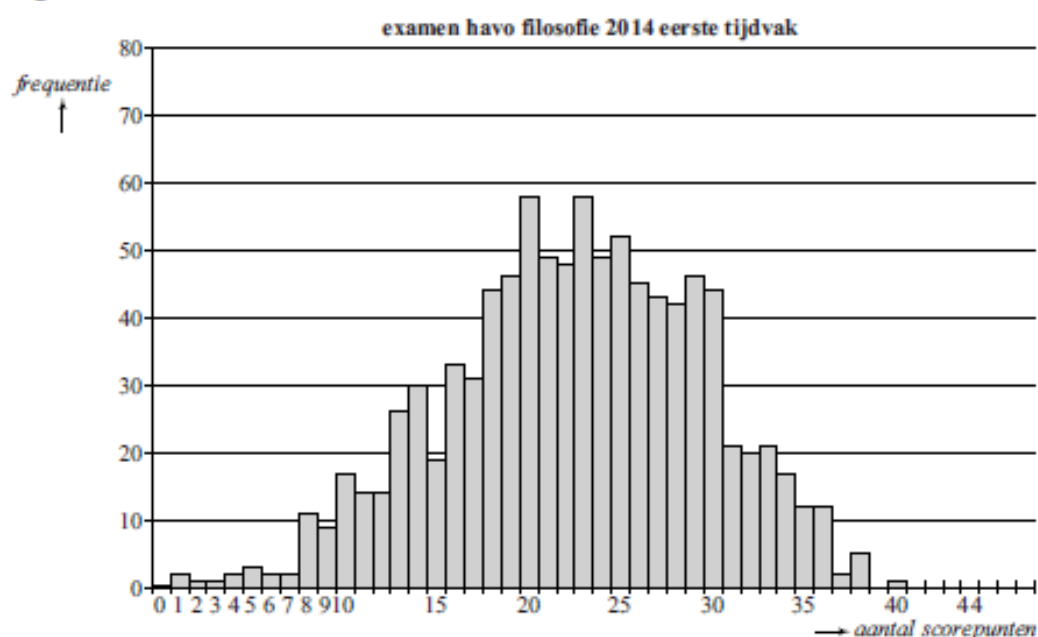
- 3p **a** Bereken met de effectgrootte of het verschil tussen de filmlengtes groot, middelmatig of gering is.
- 4p **b** Teken de boxplots.
- 3p **c** Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad welke uitspraak je kunt doen op grond van de boxplots.
- 3p **d** Bij vraag a heb je een andere conclusie getrokken dan bij vraag c over de grootte van het verschil tussen de filmlengte van de films uit 1985 en 2015. Welke van deze twee conclusies is het beste te verdedigen? Licht toe.

OPGAVE 4

Examenanalyse

Ieder jaar worden de resultaten van de examens door Cito geanalyseerd. In deze opgave bekijken we de resultaten van twee examens havo 2014 eerste tijdvak, namelijk het examen filosofie en het examen Engels. Het examen filosofie werd door ongeveer 1500 kandidaten gemaakt. Cito heeft de resultaten van 950 kandidaten binnengekregen en geanalyseerd. De resultaten van de analysegroep staan in figuur 1 en in de tabel op de uitwerkbijlage.

figuur 1



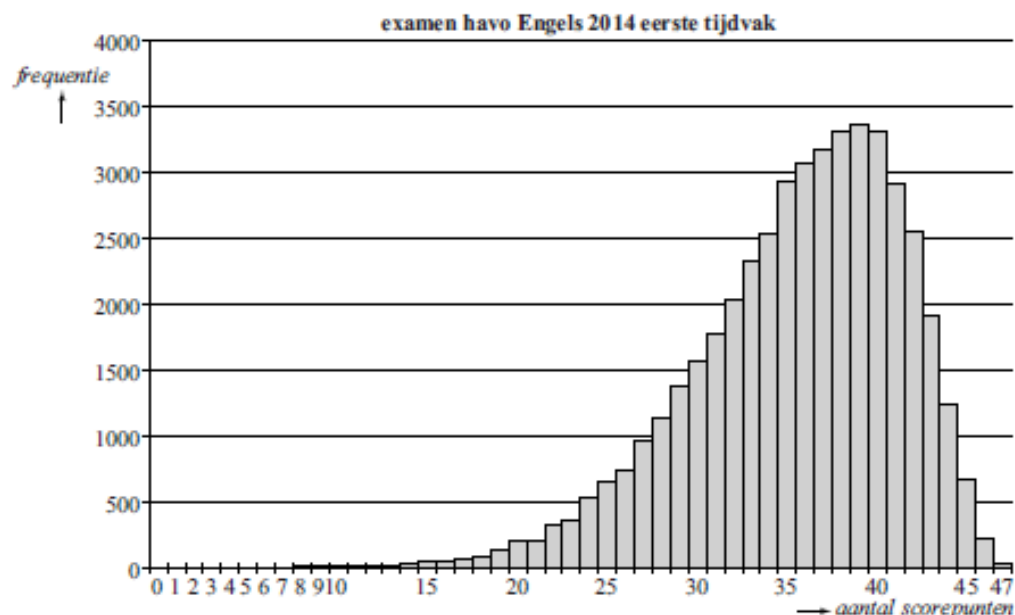
Voor het examen filosofie konden maximaal 44 scorepunten behaald worden. Zowel in de figuur als in de tabel op de uitwerkbijlage kun je zien dat de twee zwakste kandidaten in de analysegroep slechts 1 scorepunt behaalden en dat de beste kandidaat 40 scorepunten behaalde.

Het examen filosofie had een gemiddelde score van 22,5 met een standaardafwijking van 6,9. We bekijken de zwakste kandidaten in de analysegroep, met een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde.

Als de scores normaal verdeeld zouden zijn, zou je met behulp van een vuistregel van de normale verdeling kunnen berekenen hoeveel kandidaten met zo'n score er in de analysegroep waren. De scores zijn echter niet normaal verdeeld. Het aantal kandidaten met zo'n lage score in de analysegroep blijkt toch ongeveer gelijk te zijn aan het aantal dat je op grond van de normale verdeling zou verwachten.

Van het examen Engels, dat door ruim 56 000 kandidaten is gemaakt, zijn de resultaten van 45 813 kandidaten geanalyseerd. Deze resultaten staan in figuur 2 en ook in de tabel op de uitwerkbijlage. Voor dit examen konden maximaal 47 scorepunten behaald worden. De gemiddelde score was 35,6 en de standaardafwijking 5,7.

figuur 2



Door gebruik te maken van figuur 2 en de tabel voor Engels op de uitwerkbijlage kun je berekenen hoe groot het verschil is tussen de modus en de mediaan van het aantal scorepunten voor het examen Engels.

- 4p 9 Bereken dit verschil. Licht je werkwijze toe.

Voor het examen filosofie behaalde 22,8% van de kandidaten in de analysegroep een onvoldoende (een cijfer lager dan 5,5).

- 3p 10 Laat zien dat het percentage onvoldoendes voor het examen Engels iets meer dan de helft daarvan was.

- 3p 11 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kandidaten met een onvoldoende voor filosofie. Geef de grenzen in één decimaal.

filosofie		
aantal score-punten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,4	2
2	1,8	3
3	2,2	4
4	2,6	6
5	2,8	9
6	3,0	11
7	3,2	13
8	3,4	24
9	3,6	33
10	3,8	50
11	4,1	64
12	4,3	78
13	4,5	104
14	4,7	134
15	4,9	153
16	5,1	186
17	5,3	217
18	5,5	261
19	5,7	307
20	5,9	365
21	6,1	414
22	6,3	462
23	6,5	520
24	6,7	569
25	6,9	619
26	7,1	664
27	7,3	707
28	7,5	749
29	7,7	795
30	7,9	839
31	8,1	860
32	8,3	880
33	8,6	901
34	8,8	918
35	9,0	930
36	9,2	942
37	9,3	944
38	9,4	949
39	9,5	949
40	9,6	950
41	9,7	950
42	9,8	950
43	9,9	950
44	10,0	950

Engels		
aantal score-punten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,1	0
2	1,2	0
3	1,3	0
4	1,4	1
5	1,5	1
6	1,6	1
7	1,7	1
8	1,8	2
9	1,9	7
10	2,0	8
11	2,1	9
12	2,3	18
13	2,5	33
14	2,7	55
15	2,9	100
16	3,1	154
17	3,3	216
18	3,4	305
19	3,6	430
20	3,8	630
21	4,0	845
22	4,2	1162
23	4,4	1527
24	4,6	2057
25	4,8	2698
26	5,0	3431
27	5,2	4401
28	5,4	5530
29	5,6	6898
30	5,7	8456
31	5,9	10 237
32	6,1	12 271
33	6,3	14 585
34	6,5	17 118
35	6,7	20 041
36	6,9	23 119
37	7,1	26 293
38	7,3	29 606
39	7,5	32 967
40	7,7	36 267
41	7,9	39 184
42	8,1	41 724
43	8,5	43 646
44	8,9	44 904
45	9,2	45 571
46	9,6	45 780
47	10,0	45 813

FORMULEBLAD

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Vuistregels bij de grootte van het verschil van twee groepen

2 × 2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Maximale verschil in cumulatief percentage (max V_{cp}) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$ met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1

en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹ elkaar niet overlappen, dan zeggen we 'het verschil is groot'
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'
- in alle andere gevallen zeggen we 'het verschil is gering'.

¹ De 'box' is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

CORRECTIEBLAD

Opgave 1

totaal 24p

- a** $\hat{p} = \frac{315}{1050} = 0,3$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{1050}} = 0,0141\dots$ 2p
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,3 - 2 \cdot 0,0141\dots \approx 0,272$ 1p
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,3 + 2 \cdot 0,0141\dots \approx 0,328$ 1p
het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,272; 0,328]$ 1p
- b** $\hat{p} = \frac{244}{610} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{610}} = 0,0198\dots$ 1p
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,0198\dots \approx 0,360$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,0198\dots \approx 0,440$ 1p
het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,360; 0,440]$ 1p
- c** van de 315 lopers uit een Europees land waren er $315 - 244 = 71$ vrouw 1p
 $\hat{p} = \frac{71}{440} = 0,161\dots$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,161\dots \cdot 0,838\dots}{440}} = 0,0175\dots$ 1p
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,161\dots - 2 \cdot 0,0175\dots \approx 0,126$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,161\dots + 2 \cdot 0,0175\dots \approx 0,196$ 1p
het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,126; 0,196]$ 1p
- d** $4\sigma = 0,294 - 0,238 = 0,056$, dus $\sigma = \frac{0,056}{4} = 0,014$ 2p
- e** $\hat{p} = \frac{0,250 + 0,282}{2} = 0,266$ 1p
 $2\sigma = 0,266 - 0,250 = 0,016$, dus $\sigma = 0,008$ 1p
 $\sigma = \sqrt{\frac{0,266 \cdot 0,734}{n}} = \sqrt{\frac{0,195244}{n}}$ 1p
invoeren van $y_1 = \sqrt{\frac{0,195244}{x}}$ en $y_2 = 0,008$ 1p
intersect geeft $x \approx 3051$, dus men had 3050 lopers moeten ondervragen 1p
- f** de vergelijking $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{273}} = 0,025$ 1p
invoeren van $y_1 = \sqrt{\frac{x(1-x)}{273}}$ en $y_2 = 0,025$ 1p
intersect geeft $x = 0,2182\dots$ en $x = 0,7817\dots$ 1p
 $0,71817\dots$ ligt ver buiten $[0,238; 0,244]$ dus $\hat{p} = 0,2182\dots$ voldoet 1p
naar verwachting $0,2182\dots \cdot 273 \approx 60$ lopers in de leeftijd van 25-34 jaar 1p

Opgave 2

totaal 4p

- $\phi = \frac{203 \cdot 93 - 315 \cdot 412}{\sqrt{518 \cdot 505 \cdot 615 \cdot 408}} \approx -0,43$ 3p
omdat $\phi < -0,4$ is het verschil groot 1p

Opgave 3

totaal 13p

a $E = \frac{125 - 112}{\frac{1}{2}(14 + 15)} \approx 0,90$

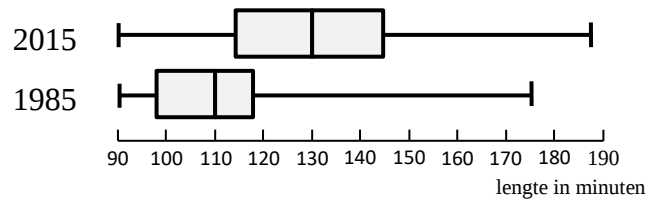
2p

$E > 0,8$, dus het verschil is groot

1p

b het correct tekenen van beide boxplots

4p



c de boxen overlappen elkaar
en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot,
dus het verschil is middelmatig.

3p

d de conclusie van vraag a
0,90 is een stuk groter dan 0,8 en de beide medianen liggen buiten
de box van de andere boxplot

1p

2p

Examenanalyse

8 maximumscore 4

- Bij een normale verdeling heeft 2,5% van de kandidaten een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde 1
- 2,5% van 950 = 23,75 (of 23 of 24) 1
- De scores moeten lager zijn dan $22,5 - 2 \cdot 6,9 = 8,7$ 1
- Aflezen uit de tabel of figuur 1: er zijn 24 kandidaten met een score lager dan 8,7 (dus evenveel als je bij de normale verdeling zou verwachten) 1

of

- De scores moeten lager zijn dan $22,5 - 2 \cdot 6,9 = 8,7$ 1
- Aflezen uit de tabel of figuur 1: er zijn 24 kandidaten met een score lager dan 8,7 1
- $\frac{24}{950} \cdot 100 (\%) = 2,5 \dots (\%)$ 1
- Dit is evenveel als je bij de normale verdeling zou verwachten 1

9 maximumscore 4

Voorbeeld van een juist antwoord:

- Uit figuur 2 blijkt dat de modus 39 (scorepunten) is 1
- In de tabel is de mediaan te vinden waar de cumulatieve frequentie (voor het eerst minstens) de helft van 45 813 (of: 22 907) is 1
- Dit is het geval bij 36 (scorepunten) 1
- Dus het verschil is 3 (scorepunten) 1

Opmerking

Voor de berekening van de modus en de mediaan mag ook van alleen de tabel of alleen figuur 2 gebruikgemaakt worden.

10 maximumscore 3

- 5530 kandidaten haalden een cijfer lager dan 5,5 1
- Het percentage kandidaten met een onvoldoende was $\frac{5530}{45813} \cdot 100 (\%)$ 1
- Dit is 12,....(%) (, dus iets meer dan de helft van 22,8(%)) 1

11 maximumscore 3

- Hier moet de formule $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ worden gebruikt 1
- Dit geeft $\frac{217}{950} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{217}{950} \cdot (1 - \frac{217}{950})}{950}}$ ($= 0,2284 \dots \pm 0,0272 \dots$) 1
- Het antwoord: [20,1; 25,6](%) 1

of

- Hier moet de formule $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ worden gebruikt 1
- Dit geeft $0,228 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,228 \cdot (1 - 0,228)}{950}}$ ($= 0,228 \pm 0,0272 \dots$) 1
- Het antwoord: [20,1; 25,5](%) (of [20,0; 25,6](%)) 1